Departamento de Análisis Matemático

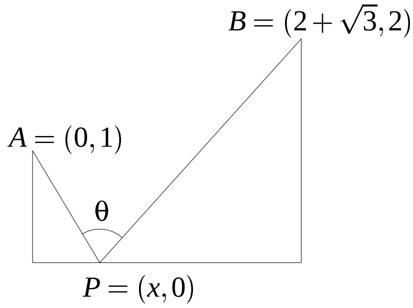
Primero de Matemáticas. Examen parcial de Cálculo

Problema 1. (a) Calcular los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{1}+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \big(\cos(1/n)\big)^{n^2}$$

(b) Estudiar para qué valores de $a>0$ es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n a^n}{n!}$

Problema 2. Calcular la posición del punto P en la figura para que el ángulo θ sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de θ? Justifica con detalle lo que haces.



Problema 3. Calcular la derivada en el punto $x=0$ de la función $f:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=(1+\operatorname{sen}x)^{1/x}, \qquad f(0)=\mathrm{e}$$

Justifica con detalle lo que haces.

Problema 4. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}\,(x^2-2x+2)} \qquad (1\leqslant x<+\infty)$$

Problema 5. Dar, según proceda, una breve justificación o un contraejemplo de los siguientes enunciados:

(a) Toda función continua en un intervalo está acotada superiormente.

(b) En todo punto donde una función derivable alcanza un mínimo relativo la derivada es nula.

(c) Una función cuya imagen es un intervalo es continua.

(d) Entre dos ceros consecutivos de la derivada de una función tiene que haber al menos un cero de la función.

Granada, 4 de febrero de 2002